Exercice :1

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel , N_1 et N_2 deux normes sur E.

1. On suppose qu'il existe un élément a de E et un réel strictement positif tel que $B_f^{N_1}(a,r) = B_f^{N_2}(a,r)$ .Montrer que $N_1 = N_2$
2. On suppose dans cette question que $B_{N_1}(a,r) = B_{N_2}(a,r)$.Montrer que $N_1 = N_2$

Solution 1 1. Soit x un vecteur non nul de E , on a $y = \dfrac{r}{N_1(x)}x + a$ est un élément de $B_f^{N_1}(a,r)$ donc $y \in B_f^{N_2}(a,r)$ ce qui veut dire que : $N_2(y-a) = \dfrac{r}{N_1(x)}N_2(x) \leq r$ ce qui entraine alors que $N_2(x) \leq N_1(x)$ et comme N_1 et N_2 jouent un rôle symétrique , alors $N_1(x) \leq N_2(x)$ et par suite $N_1(x) = N_2(x)$ et ceci étant vrai pour tout x non nul de E et comme $N_1(0_E) = N_2(0_E)$, alors $\forall x \in E$, $N_1(x) = N_2(x)$ ce qui prouve alors que $N_1 = N_2$

2. Soit x un vecteur non nul de E .On a
$$\frac{r}{N_1(x)}x + a \notin B_{N_1}(a,r) = B_{N_2}(a,r)$$
c'est à dire que $N_2\left(\dfrac{r}{N_1(x)}x\right) \geq r$, ce qui équivalent à $N_2(x) \geq N_1(x)$ et comme N_1 et N_2 jouent un rôle symétrique , alors on a $N_1(x) = N_2(x)$ et comme $N_1(0) = N_2(0)$, alors $N_1 = N_2$

Exercice :2

Soit A une partie non vide convexe de E .Montrer que $\overline{A}$ et A^0 sont convexes

Solution 2 Soit A une partie convexe de E

1. Soit $(x,y) \in \overline{A}^2$ et $t \in [0,1]$ .D'après la caractérisation d'un point adhérent , on a :
$$\exists ((x_n)_n, (y_n)_n) \in \left(A^{\mathbb{N}}\right)2 \text{ , } x_n \to x \text{ et } y_n \to y$$
.Comme A est convexe de E , alors on a :
$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ , } tx_n + (1-t)y_n \in A^2$$
Et comme $tx_n + (1-t)y_n \to tx + (1-t)y$, alors $tx + (1-t)y \in \overline{A}$, ce qui prouve alors que $\overline{A}$ est convexe de E
2. Soit $(x,y) \in \left(A^0\right)^2$, $t \in [0,1]$ et $r > 0$ tel que $B(x,r) \in A$ .Il s'agit montrons que $a = tx + (1-t)y \in A^0$. Il est clair que si $t \in \{0,1\}$, alors $tx + (1-t)y \in A^0$, supposons alors que $t \in]0,1[$, et considérons l'application de E dans E définie par $h : z \longmapsto tz + (1-t)y$, il est clair que :
$$h(x) = a \text{ et } h(B(x,r)) = B(a,tr) \subset A$$
car A est convexe et en particulier $a \in A$ et par suite la convexité de A^0

Exercice :3

Soit E un evn ,A et B deux parties de E , on suppose que A est ouvert dense dans E et B est dense dans E .Montrer que $A \cap B$ est dense dans E

Solution 3 Soient $x \in E$ et U un ouvert de E contenant x ,comme A est dense dans E , alors $U \cap A \neq \phi$ et comme B est dense dans E et $U \cap A$ est un ouvert non vide de E donc $(U \cap A) \cap B = U \cap (A \cap B) \neq \phi$ ce qui prouve que $A \cap B$ est dense dans E

Exercice :4

Soit E un espace vectoriel normé et F un sous espace vectoriel de E tel que $F \neq E$

1. Montrer que $\overline{F}$ est un sev de E.
2. Montrer qu'un hyperplan est soit fermé ou dense dans E
3. En déduire que si $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ est muni d'une norme $||.||$, alors $A = \{f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \text{ , } f(0) = 0\}$ est soit fermé soit dense dans E
4. Montrer $F^0 = \phi$
5. En déduire que si $\mathcal{O}$ est un ouvert non vide de E alors $Vect(\mathcal{O}) = E$
6. En déduire que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet une base formée des matrices inversibles
7. Que peut-on dire d'un sous espace vectoriel ouvert de E

Solution 4 1. Il est clair que $\overline{F} \neq \phi$.
Soit $(x,y) \in \overline{F}^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ .D'après la caractérisation séquentielle d'un point adhérent on a
$$\exists ((x_n)_n \text{ , } (y_n)_n) \in \left(F^{(\mathbb{N}}\right)^2 \text{ , } x_n \to x \text{ et } y_n \to y$$
Comme F est un sous espace vectoriel de E , alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha.x_n + y_n \in F$ et la suite $(\alpha.x_n + y_n)$ converge de limite $\alpha.x + y$, alors $\alpha.x + y \in \overline{F}$

2. Soit H un hyperplan de E , alors on a $H \subset \overline{H} \subset E$ .Supposons que H est inclus strictement dans $\overline{H}$, il existe alors $a \in \overline{H}$ etl que $a \notin H$ et par définition de H on a $H \oplus \mathbb{K}.a = E$ et comme H et $\mathbb{K}.a$ sont inclus dans $\overline{H}$, alors $E \subset \overline{H}$ et par suite $\overline{H} = E$, ce qui prouve alors que H est dense dans E
3. Il est clair que l'application $\varphi : f \longmapsto f(0)$ est une forme linéaire non nulle de $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, et par suite A est un hyperplan de E donc il est soit fermé ou dense dans E
4. Supposons que $F^0 \neq \phi$ et soit $a \in F^0$, alors par définition on a :
$$\exists r > 0 \text{ , } \mathcal{B}(a,r) \subset F$$
Soit x un vecteur non nul de E ,l'élément $y = \dfrac{r}{2||x||}x + a \in \mathcal{B}(a,r)$ donc c'est un élément de F et comme F est un sous espace vectoriel de E , alors $\dfrac{||x||}{2r}(y-a) = x \in F$ et comme $0_E \in F$, alors $E \subset F$ et par suite $E = F$ ce qui est absurde , donc $F^0 = \phi$
5. Soit O un ouvert non vide de E .On a $O \subset Vect(O)$, donc $\mathcal{O} = \mathcal{O}^0$ est inclus dans l'intérieur de $Vect(O)$ et par suite $Vect(O)$ est un sous espace de E d'intérieure non vide donc d'après la question précédente on a $Vect(O) = E$
6. En appliquant le résultat de la question précédente pour $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et
$\mathcal{O} = \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, alors on a $Vect(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ce qui entraine que $\mathcal{GL}_n()\mathbb{K}$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et par suite on peut extraire de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
7. Si F est un sous espace vectoriel de E , alors $Vect(F) = F$ et comme F est un ouvert alors d'après la question précédente on 4 on a $F = Vect(F) = E$.

Exercice :5

On note par E l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $||.||_\infty$ Montrer que

$$C = \{f \in E \,,\, f > 0\}$$

Est un ouvert de E

Solution 5 Soit f un élément de C , comme f est continue sur le segment $[0,1]$, alors elle est bornée et atteint ses bornes en particulier il existe $c \in [0,1]$, $f(c) = \min_{t\in[0,1]} f(t)$ .Posons $r = \frac{m}{2} > 0$ et g un élément de E tel que $||f-g||_\infty < \frac{m}{2}$, c'est à dire :

$$\forall x \in [0,1] \,,\, |f(x) - g(x)| < \frac{m}{2}$$

ce qui entraine que : $\forall x \in [0,1]$, $0 < f(x) - \frac{m}{2} \leq g(x)$ ce qui prouve alors que $B\left(f, \frac{m}{2}\right) \subset C$, et par suite C est un ouvert de E

Exercice :6

On note par E l'espace des fonctions bornées sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme infini N_∞.

1. Montrer que l'ensemble $F = \{f \in E \,,\, f \geq 0\}$ n'est pas une partie fermée de E
2. Montrer que l'ensemble $A = \left\{f \in E \,,\, \forall x \in [0,1] \,,\, e^{f(x)} \geq 2 + f(x)\right\}$ est une partie fermé , non bornée de E

Solution 6 1. Considérons l'application $f : x \longmapsto e^{-x^2}$, on a $f \in F$ Soit $r > 0$ et $g : x \longmapsto f(x) - \frac{r}{2}$ comme l'application g tend vers $-\frac{r}{2}$ en $+\infty$, alors au voisinage de $+\infty$ l'application g est strictement négative et comme $N_\infty(f-g) = \frac{r}{2}$, alors $g \in B(f,r)$ .Ceci qui entraine alors que $B(f,r)$ n'est pas inclus dans F ce qui prouve que F n'est pas un fermé de E

2. Nous allons montrer que A est une partie fermée de E en utilsant la caractérisation séquentielle des parties fermées Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de A qui converge vers une application $f \in E$, montrons que $f \in A$ .Soit $x \in [0,1]$, on a

$$||f_n(x) - f(x)|| \leq N_\infty(f_n - f) \to 0$$

Ce qui prouve alors que $f_n(x) \to f(x)$, ceci d'une part , d'autre part on a $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{f_n(x)} \geq 2 + f_n(x)$, donc par passage à la limite et par continuité de l'application exponentielle , on a $e^{f(x)} \geq 2 + f(x)$, ce qui entraine alors que $f \in A$ et par suite A est une partie fermé de E

Remarque : la convergence de la suite $(f)_n$ dans E vers l'application f veut dire que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$ donc converge simplement vers f sur $[0,1]$, donc le raisonnement fait avant suppose que la notion des suites des fonctions n'est pas encore été abordée

Montrons maintenant que A n'est pas bornée Soit $t \in [2, +\infty[$, considérons l'application $f_t : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto t \end{cases}$, en étudiant les variations de l'application $t \longmapsto e^t - (2+t)$ sur $[2, +\infty[$, on a $\forall t \in [2, +\infty[$, $e^2 \geq 2 + t$ ce qui entraine que l'application f_t est un élément de A et comme $\forall t \in [2, +\infty[$, $||f_t|| = |t| = t$, alors la partie A n'est pas bornée

Exercice :7

Soit U et V deux ouverts denses d'un espace vectoriel normé E .

1. Etablir que $U \cap V$ est encore un ouvert dense de E
2. En déduire que la réunion de deux fermés d'intérieur vide est aussi d'intérieur vide

Solution 7 1. Soit $x \in E$ et O un ouvert de E contenant x .Puisque $\overline{U} = E$, alors $O \cap U \neq \phi$ Soit alors y un élément dans $O \cap U$, comme $O \cap U$ est un ouvert de E, contenant y et $\overline{V} = E$, alors $(O \cap U) \cap V \neq \phi$, c'est à dire $O \cap (U \cap V) \neq \phi$ et ceci étant vrai pour tout ouvert de E contenant x ce qui entraine alors que $x \in \overline{U \cap V}$ et par suite $U \cap V$ est dense dans E

2. Rappelons que si A est une partie de E , alors $C_E^{A^0} = \overline{C_E^A}$ Soient F et G deux parties de E d'intérieures vide , donc par passage au complémentaire on a $C_E^{F^0} = C_E^{G^0} = E$ ce qui entraine alors que $\overline{C_E^F \cap C_E^G} = E$ c'est à dire que $\overline{C_E^{F\cup G}} = E$ ce qui est équivalent à $(F \cup G)^0 = \phi$

Exercice :8

1. Montrer que si A et B sont deux compacts , il en est de même de $A+B$.
2. Montrer que si A est compact et B est fermé , $A+B$ est fermé
3. Si on a simplement supposé que A et B sot deux fermés de E , la partie $A+B$ est-elle fermée de E

Solution 8 1. On a A et B sont compactes de E donc $A \times B$ est compact, et comme l'application $(+ : (x,y) \longmapsto x+y)$ est continue , alors l'image du compact $A \times B$ est un compact c'est à dire que $A+B$ est compact de E

2. Soit $(z_n)_n$ une suite d'éléments de $A+B$ qui converge de limite $z \in E$.Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $z_n = a_n + b_n$, avec $a_n \in A$ et $b_n \in B$, comme A est compact , alors il existe une extractrice φ de $\mathbb{N}$ telle que $a_{\varphi(n)} \to a \in A$ et comme $b_{\varphi(n)} = z_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n)}$, alors la suite $(b_{\varphi(n)})_n$ est convergente de limite $z - a$ et comme B est fermé , alors $z - a \in B$ c'est ò dire qu'il existe $b \in B$ tel que $z - a = b$, donc $z = a + b \in A+B$ ce qui prouve alors que $A+B$ est fermée de E

3. Si A et B sont deux parties fermées de E , on a pas nécessairement $A+B$ est un fermé , en effet pour $E = \mathbb{R}$, $||.|| = |.|$, $A = a\mathbb{Z}$ et $B = b\mathbb{Z}$ avec $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$, alors il est clair que A et B sont deux fermés de $\mathbb{R}$ et $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est une partie dense de E (Voir TD sup), donc elle est n'est pas fermée de $\mathbb{R}$

Exercice :9.Théorème de fermés emboités

Soit $(E, ||.||)$ un espace de Banach et $(F_n)_n$ une suite décroissante pour l'inclusion de fermés non vides telle que $\lim_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$ Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un singleton

Solution 9 On a $\delta(F_n) \to 0$ donc pour $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\delta(F_n) \leq \varepsilon$. Choisissons pour chaque n entier naturel

x_n dans F_n . Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geq n_0$, alors comme la suite $(F_n)_n$ est décroissante alors on a $(x_{n+p}, x_n) \in F_n^2$ ce qui entraine que $||x_{n+p} - x_n|| \leq \delta_n \leq \varepsilon$ ce qui prouve alors que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy de E qu'est un espace de Banach, donc elle converge vers un élément x de E .Montrons que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$ .Soit $n \in \mathbb{N}$ la suite $(x_p)_{p\geq n}$ converge de limite x car l'application $\varphi : p \longmapsto n+p$ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et $(x_p)_{p\geq n} = (x_{\varphi(p)})_p$ .Comme la suite $(F_n)_n$ est décroissante , alors $\forall p \geq n$, $x_p \in F_n$ et comme F_n est un fermé de E, alors $x \in F_n$ et ceci pour tout entier n ce qui prouve que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$

Soit $l \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $l \in F_n$ et comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \in F_n$,alors $\forall n \geq n_0$, $||x - l|| \leq \delta_n \leq \varepsilon$ ce qui entraine que $x = l$, on conclut alors que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$

Exercice :10

Si $(K_n)_n$ est une suite décroissante de parties compactes d'un espace vectoriel normé $(E, ||.||)$, alors l'intersection $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est un compact de E

Solution 10 Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in K_n$,comme la suite $(K_n)_n$ est décroissante alors la suite $(x_n)_n$ est une suite du compact K_0,il existe alors une extractrice φ telle que $(x_{\varphi(n)})_n$ est convergente de limite $c \in K_0$.Rappelons l'équivalence suivante :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E)\ ,\ \forall a \in E\ ,\ d(a, A) = 0 \Leftrightarrow a \in \overline{A}$$

Donc comme K_n est un fermé , alors $c \in K_n \Leftrightarrow d(c, K_n) = 0$ .Or pour tout $n \geq p$, $\varphi(n) \geq p$, donc $d(c, K_p) \leq ||c - x_{\varphi(n)}|| \to 0$ ce qui entraine alors que $d(c, K_p) = 0$ d'ou $c \in K_p$ et par suite $\bigcap_{p\in\mathbb{N}} K_p$ est non vide et c'est un fermé de K_0 qu'est un compact donc c'est un compact de E

Exercice :11

Soient E un espace vectoriel , K une partie compacte de E , $(u_n)_n$ une suite dans K .Montrer que si $(u_n)_n$ n'a qu'une seule valeur d'adhérence , alors $(u_n)_n$ converge

Solution 11 La suite $(u_n)_n$ est une suite d'un compact donc il existe une extractrice φ telle que $u_{\varphi(n)}$ converge vers $a \in K$ .Supposons que $(u_n)_n$ ne converge pas vers a , donc :

$$\exists \varepsilon > 0\ ,\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ ,\ \exists n \geq n_0 \text{ et } ||u_n - a|| \geq \varepsilon$$

On peut alors construire par récurrence une extractrice ψ de $\mathbb{N}$ telle que

$$(*) : \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ ||u_{\psi(n)} - a|| \geq \varepsilon$$

La suite $(u_{\psi(n)})_n$ est une suite d'un compact donc il admet une valeur d'adhérence et par suite il existe une extractrice η de $\mathbb{N}$ telle que $(u_{\psi o \eta(n)})_n$ converge et comme cette suite est aussi extraite de la suite $(u_n)_n$, alors elle admet a comme limite (car a c'est la seule valeur d'adhérence de $(u_n)_n$) .Or d'après $(*)$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $||u_{\psi o \eta(n)} - a|| \geq \varepsilon$ et par passage à la limite on a $0 \geq \varepsilon$ ce qui est absurde.On conclut alors que $(u_n)_n$ est convergente

Exercice :12

Soient K et L deux parties compactes disjointes d'un espace vectoriel normé .Montrer que $d(K, L) > 0$

Solution 12 L'application $f : \begin{cases} K \times L \to \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto d(x,y) \end{cases}$ est 2 -lipschitzienne , donc continue et comme $K \times L$ est compacte ,alors f est bornée et atteint sa borne inférieure c'est à dire il existe $(a,b) \in K \times L$, $d(K,L) = d(a,b)$ et comme $K \cap L = \phi$,alors $a \neq b$ et par suite $d(a,b) > 0$ c'est à dire $d(K,L) > 0$

Exercice :13

L'espace $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{C})$ étant normé par $||.||_\infty : f \longmapsto \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ .Montrer que la sphère unité de E n'est pas compacte

Solution 13 Pour démontrer que $S(0,1)$ n'est pas compacte il suffit d'exhiber une suite de la sphère unité telle que aucune suite extraite ne peut être convergente.Considérons la suite de fonction $(f_n)_n$ définie par $f_n : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{C} \\ t \longmapsto e^{2in\pi t} \end{cases}$

.Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0,1]$, $|f_n(t)| = 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in S(0,1)$ .Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, tel que $p \neq q$ on a :

$$(*) : \forall t \in [0,1]\ ,\ |f_p(t) - f_q(t)| = 2|\sin((q-p)\pi.t)| \leq 2$$

et on a égalité si $t = \dfrac{1}{2|q-p|} \in [0,1]$ ce qui entraine que $||f_p - f_q||_\infty = 2$ et par suite aucune sous suite de $(f_n)_n$ ne peut être convergente Dans $(*)$ on a utiliser l'égalité $\left|e^{i\alpha} - e^{i\beta}\right| = 2\left|\sin\left(\dfrac{\beta - \alpha}{2}\right)\right|$

Exercice :14

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue et injective , on se propose de montrer que f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$

1. Montrer que l'ensemble $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ x < y\right\}$ est connexe par arcs
2. Soit F l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ F(x,y) = f(x) - f(y)$$
   a. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^2$
   b. Montrer que $0 \notin F(C)$
   c. En déduire que f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$

Solution 14 1. Il est facile à vérifier que l'ensemble C est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$, donc C est une partie connexe par arcs

2. L' application $(x,y) \longmapsto f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme composé de l'application continue $(x,y) \longmapsto x$ et f de même l'application $(x,y) \longmapsto f(y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. et par suite F est continue sur $\mathbb{R}^2$
3. Si $0 \in F(C)$, alors il existe $(x,y) \in C^2$, $f(x) = f(y)$ et comme f est injective , alors $x = y$ ce qui contredit le fait que $x < y$.Donc $0 \notin F(C)$
4. F est continue et C est connexe par arcs , donc $F(C)$ est connexe par arcs de $\mathbb{R}$, donc un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contient pas 0 ,

donc $F(C) \subset \mathbb{R}_+^*$ ou $F(C) \subset \mathbb{R}_-^*$ ce qui veut dire f est strictement croissante ou strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Exercice :15

1. Montrer que $\mathbb{C}^*$ est connexe parcs
2. En déduire que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ ne sont pas homéomorphes
3. Montrer que $[0,1]$ et $\mathcal{U}$ ne sont homéomorphes

Solution 15 1. Soit $(z,z') \in (\mathbb{C}^*)^2$. Si $\forall t \in [0,1]$, $tz + (1-t)z' \neq 0$, alors l'application $\gamma : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{C} \\ t \longmapsto tz + (1-t)z' \end{cases}$ est un chemin continue joignant z et z' et de support contenu dans $\mathbb{C}^*$
Si $\exists t_0 \in]0,1[$, $0 = t_0 z + (1-t_0)z'$, alors il existe z'' dans $\mathbb{C}^*$ tel que :

$$\begin{cases} \forall t \in [0,1] \, , \, tz + (1-t)z'' \neq 0 \\ \forall t \in [0,1] \, , \, tz'' + (1-t)z' \neq 0 \end{cases}$$

Il suffit de prendre z'' un élément de la sphère $S\left(\frac{z+z'}{2}, \frac{|z-z'|}{2}\right)$ Les points z et z'' sont connectés dans $\mathbb{C}^*$ et z'' est connecté avec z' dans $\mathbb{C}^*$, donc z et z' peuvent être reliés par un chemin contenu dont le support est inclus dans $\mathbb{C}^*$, la connexité de $\mathbb{C}^*$ est prouvée

__Autrement__ Soit $z = ae^{i\alpha}$ et $z' = be^{i\beta}$ deus éléments de $\mathbb{C}^*$ avec $a > 0$ et $b > 0$, l'application

$$f : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{C}^* \\ t \longmapsto [(1-t)a + tb] \, e^{(1-t)i\alpha + it\beta} \end{cases}$$

Est une application continue sur $[0,1]$ vérifiant

$$f(0) = z \, , f(1) = z' \text{ et } \forall t \in [0,1] \, , \, |f(t)| \in [a,b] \subset \mathbb{R}_*^+$$

Ce qui entraine que le support du chemin f est contenu dans $\mathbb{C}^*$ ce qui prouve la conexité par arcs de $\mathbb{C}^*$.
Remarque $\mathbb{C}^*$ n'est pas étoilé

2. Supposons qu'il existe un homéomorphisme f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$, alors comme $\mathbb{C}^*$ est connexe par arc alors son image par f est aussi connexe par arcs à savoir $\mathbb{R}/\{f(0)\}$ ce qui est absurde.D'ou $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ ne sont pas homéomorphes

3. L'application $\varphi : \begin{cases} [0,1] \to \mathcal{U} \\ t \longmapsto e^{2i\pi t} \end{cases}$ est continue , surjective donc $\mathcal{U}$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{C}$.Il est clair que $\varphi(]0,1[) = \mathcal{U}/\{1\}$ est également connexe par arcs de $\mathbb{C}$.Supposons que $[0,1]$ et $\mathcal{U}$ sont homéomorphes et soit g un homéomorphisme de $\mathcal{U}$ dans $[0,1]$.Posons $a = g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $h : \mathcal{U} \to [0,1]$ définie par $\forall z \in \mathcal{U}$, $h(z) = g(az)$ et comme $z \longmapsto az$ est un homéomorphisme de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}$, alors h est un homémorphisme de U dans $[0,1]$ et par suite $h(\mathcal{U}/\{1\})$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}$, ce qui est absurde car $h(\mathcal{U}/\{1\}) = \left[0,\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2},1\right]$ .On conclut alors que $[0,1]$ et $\mathcal{U}$ ne sont pas homéomorphes

Exercice :16

1. Soit E un evn de dimension finie supérieur ou egale à 2 et S la sphère unitée
   a. Montrer que $E/\{0_E\}$ est connexe par arcs
   b. Déduire que la sphère unité $S(0,1)$ est connexe par arc.
2. $GL_n(\mathbb{R})$ est-il connexe par arcs

Solution 16 1. a. On procède de la même manière que l'exercice (17)

b. L'application : $f : \begin{cases} E/\{0,\} \to E \\ x \longmapsto \frac{1}{||x||}x \end{cases}$ est une application continue car l'application $||.||$ est continue ne s'annulant pas sur $E\{0\}$ et par suite $f(E/\{0\}) = S(0,1)$ est connexe par arcs

2. Si $GL_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs , alors son image par $\det$ est connexe par arcs (car $\det$ est continue) , c'est à dire que $\mathbb{R}^*$ est connexe par arcs ce qu'est absurde

Exercice :17

Soit A une partie connexe par arcs .

1. Montrer que A n'est pas la réunion de deux ouverts non vides disjoints de E
2. Montrer que les seules parties ouvertes et fermées relatives à A est ϕ et A

Solution 17 1. Supposons qu'il existe deux ouverts θ_1 et θ_2 non vides relatifs à A et disjoints tels que $A = \theta_1 \cup \theta_2$.
✎.Considérons l'application :

$$f \begin{cases} A \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \theta_1 \\ 0 & \text{si } x \in \theta_2 \end{cases} \end{cases}$$

Soit V un ouvert de $\mathbb{R}$, montrons que $f^{-1}(V)$ est un ouvert relatif à A
✎.Si $0 \notin V$ et $1 \notin V$, alors $f^{-1}(V) = \phi$ ce qui entraine que $f^{-1}(V)$ est un ouvert relatif à A
✎.Si $0 \in V$ et $1 \in V$, alors $f^{-1}(V) = A$ qu'est un ouvert relatif à A
✎.Si $0 \in V$ et $1 \notin V$, alors $f^{-1}(V) = \theta_1$ qu'est un ouvert relatif à A
✎.Si $0 \notin V$ et $1 \in V$, alors $f^{-1}(V) = \theta_2$ qu'est un ouvert relatif à A .On conclut alors que $f^{-1}(V)$ est un ouvert relatif à A et par suite f est continue sur A
✎.Comme A est connexe par arcs et f est continue , alors $f(A)$ est connexe par arcs de $\mathbb{R}$, donc c'est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et 1 , donc il contient aussi le segment $[0,1]$ ce qu'est impossible , donc A ne peut pas être réunion d'ouverts non vides relatifs à A et disjoints
✎. on montre de même que A ne peut pas être réunion de fermés non vides relatifs à A et disjoints

2. Soit B une partie ouverte et fermé relatifs à A telle que $A \neq \phi$ et $B \neq A$ .Alors $A = B \cup C_A^B$, donc A est réunion de

deux ouverts relatifs à A non vides disjoints ce qu'est absurde , donc $B = A$ ou $B = \phi$

Exercice :18

Soit A une partie connexe par arcs de E et f une application de A à valeurs dans un espace vectoriel normé $(F, ||.||_F)$.telle que f est localement constante , c'est à dire

$$\forall a \in A \, , \exists V \in \mathcal{V}_E(a) \, , \forall x \in V \cap A \, , \, f(x) = f(a)$$

Montrer que f est constante

Solution 18 Comme f est localement constante , alors f est continue sur A.

Soient a un élément de A et $X = \{x \in A \, , \, f(x) = f(a)\}$.Il s'agit de montrer que $X = A$, comme A est connexe par arcs , alors il suffit de montrer que X est un ouvert et fermé relatif à A.

✎.Soit $x \in X$, comme f est localement constante , alors il existe $r > 0$, tel que $\forall y \in A \cap B(x,r)$, $f(x) = f(y)$, et comme $f(x) = f(a)$, alors $A \cap B(x,r) \subset X$ ce qui veut dire que X est un ouvert relatif à A

✎.Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de X qui converge de limite x.
On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = f(a)$ et par continuité de f , et par passage à la limite on a $f(x) = f(a)$ ce qui entraine que $x \in X$ et par suite X est un fermé relatif à A .Comme A est connexe par arcs de E et X est non vide car il contient a , alors $X = A$

Exercice :19

1. On dit qu'une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si ${}^tAA = I_n$ L'ensemble des matrices orthogonale est noté $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $M_n(\mathbb{R})$
2. On dit qu'une matrice M à coefficients complexes est unitaire si
   ${}^t\overline{M}M = I_n$ L'ensemble des matrices unitaires est noté $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$.
   Montrer que $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ est une partie compacte de $M_n(\mathbb{C})$

Solution 19 Comme $M_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie , alors les normes sont équivalentes , on peut alors à chaque fois choisir une norme convenable .

1. Pour montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compacte il suffit de montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $M_n(\mathbb{R})$.Soit M une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$,alors on a
   $$M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow^t MM = I_n \Leftrightarrow M \in f^{-1}(\{I_n\})$$
   Avec $f : M \longmapsto^t MM$ L'application $g : M \longmapsto ({}^tM, M)$ est continue car ses composantes sont linéaires en dimension finie .
   L'application $h : (A, B) \longmapsto AB$ est continue car c'est une application bilinéaire en dimension finie , donc $f = h o g$ est continue et par suite $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$
   On muni $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $||.|| : M \longmapsto \sqrt{tr\,({}^tMM)}$ Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $||M|| = \sqrt{n} \leq n$, ce qui montre alors que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné donc compact de $M_n(\mathbb{R})$
2. Même raisonnement

20

1. Montrer qu'un polynome P unitaire à coefficients dans $\mathbb{R}$ est scindé dans $\mathbb{R}$ si et seulement si
   $$\forall z \in \mathbb{C} \, , \, |P(z)| \geq |\mathcal{I}m(z)|^{deg(P)}$$
2. Montrer que l'ensemble des matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
3. Soit
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   Montrer que A ne peut pas être limite d'une suite de matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Solution 20 1. $(\Rightarrow)$.Soit P un polynôme unitaire scindé dans $\mathbb{R}$, alors on a $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ avec $\lambda_k \in \mathbb{R}$ et $\alpha_k \in \mathbb{N}^*$. Soit $z \in \mathbb{C}$.On a
$$|P(z)| = \prod_{k=1}^{r} |z - \lambda_k|^{\alpha_k} \geq \prod_{k=1}^{r} |\mathcal{I}m\,(z - \lambda_k)|^{\alpha_k}$$
Comme $\lambda_k \in \mathbb{R}$ alors $|\mathcal{I}m(z) - \lambda_k| = |\mathcal{I}m(z)|$ et par suite
$$|P(z)| \geq \prod_{k=1}^{r} |\mathcal{I}m(z)|^{\alpha_k} = |\mathcal{I}m(z)|^{\sum_{k=1}^{r} \alpha_k} = \mathcal{I}m(z)|^{\deg P}$$
$(\Leftarrow)$.Supposons que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geq |\mathcal{I}m(z)|^{\deg P}$.Soit α une racine complexe de P (son existence est assurée par D'Alembert), on a :
$$0 = |P(\alpha)| \geq |\mathcal{I}m(\alpha)|^{\deg P}$$
Ce qui entraine alors que $\mathcal{I}m(\alpha) = 0$ et par suite $\alpha \in \mathbb{R}$ ce qui entraine que P est scindé sur $\mathbb{R}$

2. Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$, comme χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$, alors il existe une matrice triangulaire supérieure $T = (t_{i,j})_{i,j}$ et une matrice inversible P telles que $A = PTP^{-1}$ .Posons pour $p \in \mathbb{N}^*$,$T_p = (m_{ij})_{ij}$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $m_{ij} = \begin{cases} t_{ii} + \dfrac{i}{p} \; , \text{ si } \; i = j \\ t_{ij} \; , \text{ si } \; i \neq j \end{cases}$ Il est clair que si pour $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $t_{ii} = t_{jj}$, alors $t_{ii} + \dfrac{i}{p} \neq t_{jj} + \dfrac{j}{p}$.
   Soit maintenant $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $t_{ii} \neq t_{jj}$
   alors il existe $p_0 \in \mathbb{N}$, $\forall p \geq p_0$, $t_{ii} + \dfrac{i}{p} \neq t_{jj} + \dfrac{j}{p}$,en effet il suffit de choisir p_0 tel que $\forall p \geq p_0$, $p \notin \left\{ \dfrac{l - k}{t_{kk} - t_{ll}} \; , \; t_{ll} \neq t_{kk} \right\}$ ce qui entraine la suite $(T_p)_{p \geq p_0}$ est une suite de matrices diagonalisables dont la limite est T et comme l'application $M \longmapsto P.MP^{-1}$ est continue car linéaire en dimension finie , alors $\left(PT_pP^{-1}\right)_{p \geq p_0}$ est une suite de matrices diagonalisables qui converge vers A d'ou le résultat
3. On suppose qu'il existe une suite de matrices $(A_p)_p$ diagonalisables d'ordre 2 qui converge vers A.On a $\forall p \in \mathbb{N}$, χ_{A_p} est scindé sur $\mathbb{R}$, donc
   $(*) : \forall z \in \mathbb{C}$, $|\chi_A(z)| \geq |\mathcal{I}m(z)|^2$ et comme l'application $M \longmapsto \chi_M$ est continue , alors par passage à la limite dans $(*)$, on a $\forall z \in \mathbb{C}$, $|\chi_A(z)| \geq |\mathcal{I}m(z)|^2$ c'est à dire que χ_A est scindé ce qu'est absurde car $\chi_A = X^2 + 1$, donc A ne peut pas être limite d'une suite de matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
   Remarque.On peut ,en s'inspirant de la deuxième question ,démontrer que l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices trigonalisables

dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

21

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_n)$ des nombres complexes distincts

1. Montrer que $\mathbb{C}/\{a_1, \ldots, a_n\}$ est connexe par arcs
2. Soient A , B deux matrices inversibles et $z \in \mathbb{C}$, on pose
$$M(z) = (1-z)A + zB \text{ et } P(z) = \det M(z)$$
   a. Vérifier que P a un nombre fini de racines , notons les $z_1, \ldots, z_p$
   b. Montrer qu'il existe un arc de $\mathbb{C}/\{z_1, \ldots, z_p\}$ joignant 0 et 1
3. En déduire que $Gl_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs

Solution 21 1. Soit $(z, z') \in (\mathbb{C}/\{a_1, \ldots, a_n\})^2$ Si le segment d'extrémités z et z' ne contient aucun des a_i , alors le chemin $\gamma : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{C}/\{a_1, \ldots, a_n\} \\ t \longmapsto tz + (1-t)z \end{cases}$ est un chemin joignant z et z' et de support contenu dans $\mathbb{C}/\{a_1, \ldots, a_n\}$
Si le segment d'extrémités z et z' continent au moins un élément de $\{a_1, \ldots, a_n\}$, alors comme ce dernier ensemble est fini alors il existe un complexe z'' tel que les segments d'extrémités z et z'' et le segment d'extrémités z' et z'' ne contient aucun élément de $\{a_1, \ldots, a_n\}$ donc d'après le premier cas on peut lier z et z'' (respectivement z' et z'') par un chemin continue inclus dans $\mathbb{C}/\{a_1, \ldots, a_n\}$ ce qui entraine alors que z et z' sont connectés dans $\mathbb{C}/\{a_1, \ldots, a_n\}$, d'ou le résultat

2. On pose $A = (a_{ij})_{ij}$ et $B = (b_{ij})_{ij}$, soit $z \in \mathbb{C}$, alors on a $M(z) = ((1-z)a_{ij} + zb_{ij})_{i,j}$ et par suite
$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} \left((1-z)a_{i\sigma(i)} + zb_{i\sigma(i)}\right) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} \left(a_{i\sigma(i)} - z(a_{i\sigma(i)} - b_{i\sigma(i)})\right) \end{aligned}$$
Ce qui entraine que $P(z)$ est une fonction polynômiale en z de degré inférieure ou égale à n et comme $P(0) = \det(A) \neq 0$, alors P est un polynôme non nul donc admet un nombre fini de racines

3. Comme $P(0) = \det(A) \neq 0$ et $P(1) = \det(B) \neq 0$ donc les réels 0 et 1 ne sont pas des racines de P donc $(0,1) \in (\mathbb{C}/\{z_1, \ldots, z_n\})^2$ donc on peut relier 0 et 1 par un chemin ρ continue contenu dans $\mathbb{C}/\{z_1, \ldots, z_n\}$

4. L'application
$$\gamma : \begin{cases} [0,1] \to \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}) \\ t \longmapsto (1-\rho(t))A + \rho(t)B \end{cases}$$
set un chemin continu contenu dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ ce qui prouve que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs

Exercice :22 Diagonalisation des éléments d'un sous groupe de $Gl_n(\mathbb{K})$

Soit G un sous groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si G est fini alors tous ses éléments sont diagonalisables (Utiliser le théorème de Lagrange vue dans la Fiche 3)
2. Dans cette question on suppose que G est borné .
   2.1 Montrer que :
$$\forall A \in G \,,\, \forall \lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A) \,,\, |\lambda| = 1$$
   2.2 Montrer que tout élément de G est diagonalisables
3. Dans cette question on suppose que $\{tr(A) \,,\, A \in G\}$ est fini et que
$\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{V}ect(G)$ Montrer que tout éléments de G est diagonalisable .

Indication :Montrer que l'application
$$N : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ A \longmapsto \sup_{X \in G}(|tr(AX)|) \end{cases}$$
est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$et appliquer 2

Solution 22 $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie , donc ses normes sont équivalentes , on muni alors $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme subordonnée associée à la norme infinie de $\mathbb{C}^n$

1. Posons $r = \text{card}G$, alors d'après le théorème de Lagrange vue en TD d'arithmétique des entiers et des polynômes , alors on a $\forall A \in G \,,\, A^r = I_n$, ce qui entraine alors que le polynôme $X^r - 1$ est un polynôme anulateur de tout élément de G et comme il est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, alors tout élément de G est diagonalisable
2. On suppose que G est bornée , alors
$$\exists \gamma \in \mathbb{R}^* \,,\, \forall M \in G \,,\, |||M||| \leq \gamma$$
Soit A un élément de G et $\lambda \in \mathcal{S}p(A)$,et soit
$$X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \,,\, ||X||_\infty = 1 \,,\, AX = \lambda.X$$
Par une récurrence facile (C'est à faire) on a
$\forall p \in \mathbb{N}^* \,,\, A^p = \lambda^p.X$ ce qui entraine que
$$|\lambda^p|.||X||_\infty = |\lambda^p| = ||A^p.X||_\infty \leq |||A^p|||.||X||_\infty = |||A^p||| \leq \gamma$$
Ce qui prouve alors que la suite $(\lambda^p)_p$ est bornée et ceci n'a lieu que si $|\lambda| \leq 1$.
✎.On a déja fait dans le cours de la réduction que la valeur propre λ est non nulle et que $\dfrac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de la matrice A^{-1} , donc en reprenant le raisonnement précèdent en remplaçant A par A^1 , on aura $\left|\dfrac{1}{\lambda}\right| \leq 1$ ce qui entraine alors que $|\lambda| = 1$
3. Soit A un élément de G .Considérons l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$, canoniquement associé à A.Pour montrer que u est diagonalisable il suffit de montrer que $\ker(u - \lambda.id_{\mathbb{C}^n}) = \ker(u - \lambda.id_{\mathbb{C}^n})^2$ (Voir l'exercice (9) de la fiche des grands classique de la réduction).On sait que
$$\ker(u - \lambda.id_{\mathbb{C}^n}) \subset \ker(u - \lambda.id_{\mathbb{C}^n})^2$$
Supposons qu'on a pas l'autre inclusion , alors :
$$\exists x \in \ker(u - \lambda.id_{\mathbb{C}^n})^2 \,,\, x \notin \ker(u - \lambda.id_{\mathbb{C}^n})$$
Le vecteur $y = u(x) - \lambda.x$ est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ .On a $u(x) = y + \lambda.y$, par une récurrence

✉ : hfa.ahmed@yahoo.fr

facile (mais à faire) ,on montre que :
$$\forall p \in \mathbb{N}^* \ , \ u^p(x) = p\lambda^{p-1}.y + \lambda^p.x$$
Ce qui entraine alors que $p\lambda^{p-1}.y = u^p(x) - \lambda^p.x$ et par suite on a $||p\lambda^{p-1}.y|| = ||u^p(x) - \lambda^p.x||$, c'est à dire que $p||y|| \leq ||u^p(x)|| + ||x||$, d'ou $p||y|| \leq (||u^p|| + 1)\,||x||$et comme y est non nul , alors on a
$$\forall p \in \mathbb{N} \ , \ p \leq (1 + ||u^p||)\frac{||x||}{||y||}$$
ce qui est absurde car $\mathbb{N}$ n'est pas majoré , on conclut alors que

$\ker(u - \lambda.id_E)^2 = \ker(u - \lambda.id_E)$ ce qui veut dire que la valeur propre λ est une racine simple du polynôme minimal de u (Voir l'exercice (9) fiche des grands classique de la réduction) , ce qui prouve alors la diagonalisabilité de u

Exercice :23

Application contractante

Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé complet , f une application de E dans E, a un élément de E et $(x_n)_n$ la suite d'éléments de E définie par
$$x_0 = a \quad et \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

1. On suppose dans cette question que f est contractante .
   a. Montrer que la suite $(x_n)_n$ est convergente
   b. En déduire que f admet un unique point fixe
2. Dans cette question , on suppose qu'il existe un entier naturel non nul p tel que $f^p = \underbrace{fofo\dots of}_{p \text{ fois}}$ est contractante

   Montrer que f admet un point fixe

Solution 23 1. On suppose que f est contractante

✎.Soit $n \in \mathbb{N}^*$ .On a :
$$||x_{n+1} - x_n|| = ||f(x_n) - f(x_{n-1})|| \leq k||x_n - x_{n-1}||$$
Par une récurrence facile on a
$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ ||x_{n+1} - x_n|| \leq k^n||x_1 - x_0||$$
.On a alors pour tout entier naturel p :
$$||x_{n+p} - x_n|| \leq \sum_{i=1}^{p} ||x_{n+i} - x_{n+i-1}|| \leq \left(\sum_{i=0}^{p-1} k^{n+i}\right) ||x_1 - x_0|| \leq \frac{k^p}{1-k}||x_1 - x_0||$$
Ce dérnier terme tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$ car $0 \leq k < 1$ et par suite :
$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists p_0 \in \mathbb{N} \ , \ \forall p \geq p_0 \ , \ \left|\frac{k^p}{1-k}\right| \leq \varepsilon$$
Ce qui entraine alors que
$$\forall p \geq p_0 \ , \ ||x_{n+p} - x_n|| \leq \varepsilon$$
Ce qui veut dire que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy et comme E est un espace de Banach , alors la suite $(x_n)_n$ est convergente de limite $x \in E$.

✎.Comme l'application f est lipschitzienne , alors elle est continue et par suite d'après la caractérisation séquentielle de la continuité , on a $f(x) = x$ d'ou l'existence d'un point fixe pour f

✎.Supposons l'existence de deux points fixes , x et y de f, alors $||f(x) - f(y)|| \leq k||x - y||$,c'est à dire $||x - y|| \leq k||x - y||$ et comme $k < 1$, alors $x = y$

2. Soit p un entier naturel non nul tel que f^p est contractante de rapport $k \in [0, 1[$ .D'après la question 1 , toute application contractante admet un unique point fixe donc il existe un unique $x \in E$ tel que $f^p(x) = x$ .On a
$$||f^p(f(x)) - f^p(x)|| \leq k||f(x) - x||$$
C'est à dire que
$$||f(f^p(x)) - f^p(x)|| = ||f(x) - x|| \leq k||f(x) - x||$$
Et comme $k < 1$, alors $f(x) = x$ .D'ou le résultat.

✎.On peut aussi remarquer que $f^p(f(x)) = f(f^p(x)) = f(x)$ ce qui entraine alors que $f(x)$ est aussi un point fixe de f^p par unicité on a alors $f(x) = x$ ce qu'il fallait démontrer

Exercice :24

Soient $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé , K une partie compacte et convexe de E et f une application 1- lipchitzienne de K dans $\mathbb{K}$

1. Soient a un élément de K et n un entier naturel non nul Soit f_n l'application de K dans K définie par
$$\forall x \in K \ , \ f_n(x) = \frac{1}{n}a + \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x)$$
   Montrer que l'application f_n admet un unique point fixe α_n
2. En déduire que f admet un point fixe

Solution 24 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{K}$

✎.Soit $x \in K$ .Puisque K est convexe e $f(K) \subset K$, alors le vecteur :
$$f_n(x) = \frac{a}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x)$$
est un élément de K ce qui enrtraîne alors que $f_n(K) \subset K$

✎.Pour tout $(x, y) \in K^2$, on a
$$||f_n(x) - f_n(y)|| = \left(1 - \frac{1}{n}\right) ||x - y||$$
Ce qui montre alors que l'application f_n est contractante sur K donc d'après l'exercice (23) , elle admet un point fixe x_n dans K , on a
$$(*) : x_n = \frac{a}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x_n)$$

2. Comme K est compact , alors il existe une extractrice φ de $\mathbb{N}$ telle que $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$ converge vers un élément x de K. D'après la relation $(*)$, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ x_{\varphi(n)} = \frac{a}{\varphi(n)} + \left(1 - \frac{1}{\varphi(n)}\right) f\left(x_{\varphi(n)}\right)$$
Et comme f est continue , alors par passage à la limite on a $f(x) = x$, d'ou l'existence d'un point fixe de f

Exercice :25

Soient K une partie compacte d'un espace vectoriel normé $(E, ||.||)$ et f une application de K dans K telle que :
$$(*) : \forall (x, y) \in K^2 \ , \ x \neq y \Rightarrow ||f(x) - f(y)|| < ||x - y||$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe noté α
2. Soit a un point quelconque de K et $(x_n)_n$ une suite de K définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ x_{n+1} = f(x_n)$$
   On se propose de montrer que la suite $(x_n)_n$ est convergente de limite α.Pour cela , posons pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = ||x_n - \alpha||$.Le résultat est clair si $(u_n)_n$ est stationnaire

, on suppose dans la suite que la suite (u_n) n'est pas stationnaire

1. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente de limite l
2. En utilisant la compacité de K , montrer que $l = 0$
3. Conclure

Solution 25 1. ✎.Unicité Supposons que f admet de deux points fixes x et y tels que $x \neq y$, alors par application de $(*)$, on a
$||x-y|| = ||f(x)-f(y)|| < ||x-y||$ ce qui est absurde d'ou l'unicité
✎.Existence : L'application $g : \begin{cases} K \to K \\ x \longmapsto ||x-f(x)|| \end{cases}$ est continue dans le compact K , donc elle est bornée et atteint ses bornes en particulier elle atteint sa borne inférieure en un point α Supposons que $f(\alpha) \neq \alpha$, alors par application de $(*)$, on a $||f(f(\alpha)) - f(\alpha)|| < ||f(\alpha)-\alpha||$ c'est à dire que $g(f(\alpha)) < g(\alpha)$ et ceci contredit la définition de α et par suite $f(\alpha) = \alpha$, d'ou le résultat

2. Soit $a \in K$ et $u_n = ||x_n - \alpha||$.
Supposons que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $x_{n_0} = \alpha$, donc par une récurrence facile on a $\forall n \geq n_0$, $x_n = \alpha$ ce qui entraine que $(u_n)_n$ est stationnaire ce qui est absurde , donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq \alpha$
On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = ||x_{n+1} - \alpha|| = ||f(x_n) - f(\alpha)|| < ||x_n - \alpha|| = u_n$ et par suite la suite $(u_n)_n$ est strictement décroissante et comme elle est minoré par 0 , alors elle converge

3. Comme K est compact , alors il existe une extractrice φ de $\mathbb{N}$ telle que $(x_{\varphi(x)})_n$ converge de limite γ , si on suppose que $\gamma \neq \alpha$, alors d'après $(*)$, on a $||f(\gamma) - f(\alpha)|| = ||f(\gamma) - \alpha|| < ||\gamma - \alpha||$ .Or
$$u_{\varphi(n)+1} = ||x_{\varphi(n)+1} - \alpha|| = ||f(x_{\varphi(n)}) - \alpha||$$
L'application $n \longmapsto \varphi(n) + 1$ est une extractrice de $\mathbb{N}$, donc par passage à la limite et par continuité de f on a :
$l = ||f(\gamma) - \alpha|| < ||\gamma - \alpha|| = l$ ce qu'est absurde donc $\gamma = \alpha$ et par suite $l = 0$

4. On conclut alors que $(x_n)_n$ converge de limite α

Exercice :26
Soit A une matrice antisymétrique d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$ telle que la suite $(A^p)_p$ converge Montrer que sa limite est nulle

Solution 26 Les sous espaces vectoriels $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont de sous espaces de dimension finie , donc il sont fermés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ Si on note par B la limite de la suite $(A^p)_p$ .Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a ${}^t(A^{2p}) = ({}^tA)^2 = (-A)^{2p} = A^{2p}$ ce qui entraine que la matrice A^{2p} est une matrice symétrique donc sa limite qu'est égale à B , car elle est extraite de $(A^p)_p$, est une matrice symétrique de même B est aussi la limite de la suite $(A^{2p+1})_p$ qu'est une suite d'éléments de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, donc B est une matrice antisymétrique car $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est fermé .On a alors $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ce qui entraine alors que $B = 0_n$

Exercice :27
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Déterminer les réels a tels que la suite $(a^p A^p)_p$ converge vers une limite non nulle

Solution 27 Le polynôme caractéristique de la matrice A est $\chi_A = -X(X-1)(X-3)$, il est donc scindé à racines simples , la matrice A est alors diagonalisable Il existe alors une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .Ce qui entraine que
$$\forall n \in \mathbb{N}^* , \; a^n A^n = P. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & (3a)^n \end{pmatrix} .P^{-1}$$
.La suite $\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & (3a)^n \end{pmatrix} \right)_n$ converge vers une matrice non nulle si et seulement si, la suite $(a^n)_n$ converge vers vers un réel non nul ou la suite $((3a)^n)_n$ converge vers un réel non nul , donc la seule possibilité est $a = \dfrac{1}{3}$ .L'application $M \longmapsto P.M.P^{-1}$ est continue car linéaire en dimension finie , donc la suite $\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & (3a)^n \end{pmatrix} .P^{-1} \right)_n$ converge de limite non nulle si $a = \dfrac{1}{3}$

Exercice :28
Soit A une matrice d'ordre n à coefficients réels .Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A pour qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la suite $(M^k)_k$ converge

Solution 28 1. Condition necéssaire Si une telle matrice M existe , alors d'après la caractérisation séquentielle de la continuité de l'application $N \longmapsto N^2$, on a $\lim\limits_{k \to +\infty} M^{2k} = A^2$ et comme la suite $(M^{2k})_k$ est extraite de la suite $(M^k)_k$, alors elle va converger vers la matrice A , donc par unicité de la limite on a $A^2 = A$.

2. Condition suffisante. Si $A^2 = A$, alors en posant $M = A$, on a bien $\lim\limits_{k \to +\infty} M^k = A$.On conclut alors que La condition necéssaire et suffisante cherchée est que A soit une matrice de projection

EXercice :29
Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé de dimension finie non nulle et soient A et B deux parties connexes par arcs de E

1. Montrer que $A \times B$ est connexe par arcs
2. Montrer que $A + B = \{a + b \, , \, a \in A \text{ et } b \in B\}$ est connexe par arcs

Solution 29 1. Soit $((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in (A \times B)^2$, comme $A(respB)$ est connexe par arcs , alors il existe un chemin $\gamma_1(resp\gamma_2)$ continu sur $[0,1]$ à valeurs dans $A(respB)$ tel que

$\gamma_1(0)=a_1$ et $\gamma_1(1)=a_2$ (resp $\gamma_2(0)=b_1$ et $\gamma_2(1)=b_2$) L'application ρ définie sur $[0,1]$ par

$$\forall t\in[0,1]\ ,\ \rho(t)=(\gamma_1(t),\gamma_2(t))$$

Est continue car ses composantes le sont .Et

$$\rho([0,1])\subset A\times B\ ,\ \rho(0)=(a_1,b_1)\text{ et }\rho(1)=(a_2,b_2)$$

ce qui prouve alors que $A\times B$ est connexe par arcs

2. Soit $(x,y)\in(A+B)^2$ avec $x=a_1+b_1$ et $y=a_2+b_2$,Soit $\gamma_1(\text{resp}\gamma_2)$ un chemin continu tracé sur A (resp sur B) joignant $a_1 \text{et} a_2$ (respb_1 et b_2) , l'application ρ définie sur $[0,1]$ par $\forall t\in[0,1]\ ,\ \rho(t)=\gamma_1(t)+\gamma_2(t)$ est une application continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $A+B$ joignant x et y , ce qui montre la connexité de $A+B$

Exercice :30

Soient A et B deux parties fermées d'un espace vectoriel normé de dimension finie telles que $A\cap B$ et $A\cup B$ sont connexe par arcs .Montrer que A et B sont connexe par arcs

Solution 30 Soit $(a,b)\in A^2$, on a $(a,b)\in(A\cup B)^2$, donc par hypothèse il existe un chemin continue γ joignant a à b et contenu dans $A\cup B$ tel que $\gamma(0)=a$ et $\gamma(1)=b$.

✎Si $\gamma([0,1])\subset A$, alors c'est terminé

✎Si non soit $\mathcal{B}=\{t\in[0,1]\ ,\ \gamma(t)\in B\}$. Par hypothèse cet ensemble est non vide et borné donc admet une borne inférieure noté t_0 et une borne supérieure t_1 .D'après la caractérisation séquentielle de la borne inférieure , il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{B}$ qui converge vers t_0 , par continuité de γ on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\gamma(x_n)=\gamma(t_0)$ et comme B est fermé de E ,alors $\gamma(t_0)\in B$ ceci d'une part d'autre part $\forall t\in[0,t_0[$, $\gamma(t)\in A$ donc par passage à la limite quand t tens vers t_0 et par continuité de γ et comme A est fermé alors on a $\gamma(t_0)\in A$,donc $\gamma(t_0)\in A\cap B$ de même on montre que $\gamma(t_1)\in A\cap B$.La partie $A\cap B$ est connexe par arc donc il existe un chemin σ de l'intervalle $[t_0,t_1]$ à valeurs dans $A\cap B$ tel que $\sigma(t_0)=\gamma(t_0)$ et $\sigma(t_1)=\gamma(t_1)$ .Considérons l'application

$$\rho:\begin{cases}[0,1]\to E\\ t\longmapsto\begin{cases}\sigma(t)\text{ si }t\in[t_0,t_1]\\ \gamma(t)\text{ si non}\end{cases}\end{cases}$$

L'application ρ est continue à valeurs dans A joignant a et b, ce qui prouve alors que A est connexe par arcs de même pour B

Exercice :31

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Montrer que si $n\geq1$ et si H est un hyperplan de E ,alors E/H n'est pas connexe par arcs
2. Montrer que si $n\geq2$ et si F est un sous espace de E de dimension inférieure ou égale à $n-2$,alors E/F est connexe par arcs

Solution 31 1. H est un hyperplan de E donc il existe une forme linéaire non nulle de E telle que $H=\ker(\varphi)$.

Soient $(a,b)\in E^2$ tel que $\varphi(a)>0$ et $\varphi(b)<0$ et γ un chemin de $[0,1]$ dans E/H joignant a et b .L'application ρ : $\begin{cases}[0,1]\to\mathbb{R}\\ t\longmapsto\varphi(\gamma(ta+(1-t)b))\end{cases}$ est continue sur $[0,1]$ comme composée d'applications continues et $\rho(0)\rho(1)<0$, donc d'après T.V.I il existe $t_0\in]0,1[$, $\rho(t_0)=0$, c'est à dire $\gamma(t_0a+(1-t_0)b)\in H$ ce qui contredit le fait que γ est à support dans E/H .On conclut alors que E/H n'est pas connexe par arcs

2. Soit F un sous espace de E de dimension inférieur p ou égale à $n-2$ et $B=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E adaptée à F.Soit $x=\sum\limits_{i=1}^n x_ie_i$ et $y=\sum\limits_{i=1}^n y_ie_i$ deux éléments de E n'appartenant pas à F donc

$$\exists(i_0,j_0)\in[\![p+1,n]\!]^2\ ,\ x_{i_0}\neq0\text{ et }y_{j_0}\neq0$$

On suppose par exemple que $x_{i_0}>0$, l'application

$$\gamma:\begin{cases}[0,1]\to E\\ t\longmapsto\sum\limits_{i=1}^n(1-t)x_ie_i+te_{i_0}\end{cases}$$

Est une application continue sur $[0,1]$, $\gamma(0)=x$ et $\gamma(1)=e_{i_0}$
Soit $t\in]0,1[$ on a

$$\gamma(t)=\sum_{i=1\,,\,i\neq i_0}^n(1-t)x_ie_i+\underbrace{((1-t)x_{i_0}+t)}_{\in\mathbb{R}_+^*}e_{i_0}\in E/F$$

Donc γ est à support dans E/F.De même si $y_{j_0}>0$ on peut relier y au vecteur e_{j_0} et comme les vecteurs e_{i_0} et e_{j_0} sont dans l'espace $\text{Vect}(e_{p+1},\dots,e_n)$ et comme sa dimension est supérieure ou égale à 2 ,alors $\text{Vect}(e_{p+1},\dots,e_n)/\{0_E\}$ est connexe par arcs et par suite on peut relier $e_{i_0}\text{et}e_{j_0}$ par un chemin continue contenu dans $\text{Vect}(e_{p+1},\dots,e_n)/\{0_E\}$ donc dans E/F.On conclut alors que x et y sont relier par un chemin continu et contenu dans E/F .

Si $x_{i_0}<0$, on fait un raisonnement analogue en remplaçant e_{i_0} par $-e_{i_0}$

Exercice :32

Soient $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $||.||_\infty$ et

$$A=\left\{f\in E\ ,\ f(0)=0\text{ et }\int_0^1f(t)dt\geq1\right\}$$

1. Montrer que A est une partie fermée de E
2. Vérifier que $\forall f\in E\ ,\ ||f||_\infty>1$
3. Calculer la distance de la fonction nulle à la partie A

Solution 32 1. Soit $\varphi:f\longmapsto f(0)$ et $\psi:f\longmapsto\int_0^1f(t)dt\geq1$ .Soient f et g deux éléments de E , on a :

$$|\varphi(f)-\varphi(g)|=|f(0)-g(0)|\leq||f-g||_\infty$$

Ce qui veut dire que φ est lipscitzienne donc continue sur E.Ceci d'une part d'autre part on a

$$|\psi(f)-\psi(g)|=|\int_0^1(f(t)-g(t))\,dt|\leq\int_0^1|f(t)-g(t)|dt\leq||f-g||_\infty$$

Donc ψ est lipschitzienne donc continue ,on en déduit alors que $\varphi^{-1}(\{0\})$ est un fermé de E et $\psi^{-1}([1,+\infty[)$ est un fermé de E et par suite A est fermé de E

2. Supposons que $\exists f\in A$ telle que $||f||_\infty\leq1$,alors

$$1\leq\int_0^1f(t)dt=\left|\int_0^1f(t)dt\right|\leq\int_0^1|f(t)|dt\leq||f||_\infty\leq1$$

3.

Exercice :33

Soit $A=\begin{pmatrix}\frac13&\frac12\\ \frac14&-\frac12\end{pmatrix}$ .Montrer que la série de terme général A^n est convergente et calculer sa somme

Solution 33 La norme sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est la norme subordonnée associé à la norme infinie sur $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Si on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors on a

$$||AX||_\infty = \max\left(\left|\frac{x}{3}+\frac{y}{2}\right|,\left|\frac{x}{4}-\frac{y}{2}\right|\right) \leq \frac{5}{6}\max(|x|,|y|) = \frac{5}{6}||X||_\infty < 1$$

D'ou $||A|| < \frac{5}{6} < 1$ et par suite la série $\sum_n A^n$ converge de somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = (I_2 - A)^{-1} = \frac{2}{21}\begin{pmatrix} 18 & 6 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Excercice :34

La lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. Soit M une matrice d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.Montrer qu'il existe un entier naturel k_0 tel que

$$\forall k \in \geq k_0\,,\ \sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}M^j \in \mathcal{G}L_n(\mathbb{K})$$

Solution 34 $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie non nulle, donc ses normes sont équivalentes , donc , on choisit alors une norme quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .On rappelle que $\mathcal{G}L_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car $\mathcal{G}L_n(\mathbb{K}) = \overset{-1}{\det}(\mathbb{K}^*)$ et $\mathbb{K}^*$ est un ouvert et $\det$ est continue .Puisque $e^M \in \mathcal{G}L_n(\mathbb{K})$, alors $\exists r > 0\,,\ \mathcal{B}\left(e^M, r\right) \subset \mathcal{G}L_n(\mathbb{K})$.

Or $e^M = \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k!}M^k$ ce qui entraine alors que

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}\,,\ \forall k \geq k_0\,,\ \sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}M^j \in \mathcal{B}\left(e^M, r\right)$$

Et par suite $\forall k \geq k_0\,,\ \sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}M^j \in \mathcal{G}L_n(\mathbb{K})$